極小有界等質領域上の荷重Bergman空間における合成作用素(表現論と調和解析における諸問題)

山路, 哲史

数理解析研究所講究録
第1770巻2011年80-86

極小有界等質領域上の荷重Bergman空間における合成作用素

名古屋大学 多元数理科学研究科 山路哲史(Satoshi Yamaji)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

概要

極小有界等質領域上の荷重 Bergman 空間における合成作用素の性質を Bergman 核を用いて考察する．合成作用素の有界性（コンパクト性）は測度の Carleson 性（vanishing Carleson 性）を用いて表すことができ，これらの性質を議論する際に Bergman 核の評価式が役立つ．また，Schur の定理，及び等質 Siegel 領域における積分公式を利用し，有界な合成作用素がコンパクトになるための必要十分条件を Bergman 核の境界挙動を用いて表す.

1 序

$D\subset\mathbb{C}^{n}$ を有界領域とし，φ を D から D への正則写像とする．合成作用素 C_{φ} とは，$C_{\varphi}f:=f\circ\varphi$ で定義される線形作用素である．この作用素を極小有界等質領域上の荷重 Bergman 空間において考察する.

以下，$\mathcal{U}\subset\mathbb{C}^{n}$ を極小有界等質領域とする (定義は2章を参照). dV を $\mathbb{C}^{n}$ の Lebesgue 測度，Lebesgue 測度に関して二乗可積分かつ正則な関数からなる空間を $L_{a}^{2}(\mathcal{U}, dV)$, $K_{\mathcal{U}}(z, w)$ を $\mathcal{U}$ の Bergman 核とする．また，$\beta\in \mathbb{R}$ に対し，$dV_{\beta}(z):= K_{\mathcal{U}}(z, z)^{-\beta}dV(z)$ とし，荷重 Bergman 空間 $L_{a}^{p}(\mathcal{U}, dV_{\beta}):=L^{p}(\mathcal{U}, dV_{\beta})\cap \mathcal{O}(\mathcal{U})$ を考える．このとき，次を満たす $\varepsilon_{\min}$ が存在することが知られている；$\beta>\varepsilon_{\min}$ である事と $L_{a}^{p}(\mathcal{U}, dV_{\beta})\neq\{0\}$ は同値である．例えば，単位円板 $\mathbb{D}:=\{z\in \mathbb{C}\mid|z|<1\}$ における $\varepsilon_{\min}$ は $-\frac{1}{2}$ である.

荷重 Bergman 空間 $L_{a}^{p}(\mathcal{U}, dV_{\beta})$ における有界な合成作用素がコンパクト作用素になるための条件について，$\mathcal{U}$ が単位球の場合には Zhu による結果 [11, Theorem 4.1] が知られている．また，2011年には Lu, Hu によってこの結果は Harish-Chandra 実現された有界対称領域へと拡張された [6, Theorem]．単位球や Harish-Chandra 実現された有界対称領域は極小有界等質領域であるため，今回得られた結果はこれらの結果を含むものである.

定理 1.1 ([9, Theorem A]). ある $q>0$ と $\beta_0>\varepsilon_{\min}$ に対し，C_φ は $L_a^q(\mathcal{U}, dV_{\beta_0})$ 上の有界作用素であるとする．このとき，以下は同値である．
(1) 任意の $p>0$ と $\beta>\beta_0+\varepsilon_{\mathcal{U}}$ に対し，C_φ は $L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上のコンパクト作用素である．
(2) $\displaystyle\lim_{z\to\partial\mathcal{U}} \frac{K_{\mathcal{U}}(\varphi(z),\varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}(z,z)}=0.$

また，Zhu や Lu, Hu の結果と同様，C_φ の有界性に関する仮定は (2) $\Longrightarrow$ (1) を示す際にのみ用いる．

2 極小有界等質領域

極小領域とは，次を満たす領域のことである．

- $\det J(\psi,t)=1$ を満たす任意の双正則写像 $\psi: D\longrightarrow D'$ に対し $\mathrm{Vol}\,(D)\le \mathrm{Vol}\,(D')$ が成立するとき，D は t を中心とする極小領域であるという．

有界領域が極小領域であるための必要十分条件として，次が知られている．

命題 2.1 ([4, Proposition 3.6], [7, Theorem 3.1]). $D\subset\mathbb{C}^n$ を有界領域とし，$t\in D$ とする．このとき，D が中心 t の極小領域であることは，すべての $z\in D$ で

$$K_D(z,t)=\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(D)}$$

が成立することと同値である．

例えば，単位円板 $\mathbb{D}$ の Bergman 核は $K_{\mathbb{D}}(z,w)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}$ なので $\mathbb{D}$ は 0 を中心とする極小領域である．また，Harish-Chandra 実現された有界対称領域，及びそれの等質領域への拡張にあたる有界等質代表領域も 0 を中心とする極小領域であることが知られている ([4, Proposition 3.8])．任意の有界等質領域は有界等質代表領域と正則同値である．したがって，すべての有界等質領域は極小領域と正則同値であることがわかる．

極小有界等質領域の Bergman 核は次の性質を持つ．定理 2.2 は伊師英之氏との共同研究により得られたものである．

定理 2.2 ([5, Theorem A]). 任意の $r>0$ に対し，$C_r>0$ を次が満たすようにとれる：$d_{\mathcal{U}}(z,a)\le r$ を満たすすべての $z,a\in\mathcal{U}$ に対し，

$$C_r^{-1}\le\left|\frac{K_{\mathcal{U}}(z,a)}{K_{\mathcal{U}}(a,a)}\right|\le C_r$$

が成立する．$d_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{U}$ の Bergman 距離とする．

$K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}$ を $L_a^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ の再生核とする．このとき，ある定数 C_β を用いて $K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(z,w) = C_\beta K_{\mathcal{U}}(z,w)^{1+\beta}$ とかける事が知られている．各 $z \in \mathcal{U}$ に対し，$k_z^{(\beta)}$ を

$$k_z^{(\beta)}(w) := \frac{K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(w,z)}{K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(z,z)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{C_\beta}\left(\frac{K_{\mathcal{U}}(w,z)}{K_{\mathcal{U}}(z,z)^{\frac{1}{2}}}\right)^{1+\beta}$$

で定義する．極小有界等質領域の Bergman 核の性質より，$z \to \partial\mathcal{U}$ とすると $k_z^{(\beta)}$ は $\mathcal{U}$ 上 0 に広義一様収束することがわかる．

3　Berezin 変換，平均関数，Carleson 測度

ここでは Bergman 空間上の合成作用素に関する考察を行う上で有用な Berezin 変換，平均関数，Carleson 測度についての定義と性質を述べる．

$\mathcal{U}$ 上の正 Borel 測度 μ に対し，$\mathcal{U}$ 上の関数 $\widetilde{\mu}$ を

$$\widetilde{\mu}(z) := \int_{\mathcal{U}} |k_z^{(\beta)}(w)|^2 \, d\mu(w)$$

で定義する．$\widetilde{\mu}(z)$ は測度 μ の Berezin 変換と呼ばれる．また，$\mathcal{U}$ 上の関数 $\widehat{\mu}$ を

$$\widehat{\mu}(z) := \frac{\mu(B(z,r))}{\mathrm{Vol}_\beta\,(B(z,r))}$$

で定義する．ここで，$B(z,r)$ は中心 z，半径 r の Bergman 円板とし，Borel 集合 $E \subset \mathcal{U}$ に対し，

$$\mathrm{Vol}_\beta\,(E) := \int_E dV_\beta(w)$$

とする．$\widehat{\mu}(z)$ は測度 μ の平均関数と呼ばれる．

$p > 0$ に対し，次を満たす正の定数 M が存在するとき，μ は $L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$ に関する Carleson 測度であるという：すべての $f \in L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$ に対し，

$$\int_{\mathcal{U}} |f(z)|^p \, d\mu(z) \le M \int_{\mathcal{U}} |f(z)|^p \, dV_\beta(z)$$

が成立する．μ が $L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$ の Carleson 測度であることは，$L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta) \subset L^p(\mathcal{U}, d\mu)$ で包含写像

$$i_p : L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta) \longrightarrow L^p(\mathcal{U}, d\mu)$$

が有界作用素であることと同値である．

さらに，$L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$ の Carleson 測度 μ が vanishing Carleson 測度であるとは，0 に広義一様収束する $L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 内の任意の有界列 $\{f_k\}$ に対し

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{U}} |f_k(w)|^p \, d\mu(w) = 0$$

が成立するときをいう.

定理 2.2 を用い，平均関数の性質を考察する事で μ が Carleson 測度，vanishing Carleson 測度であることは p によらないということがわかる．さらに，次の結果も得られる.

定理 3.1 **([9, Theorem 3.1]).** μ を正の Borel 測度とする．このとき，次は同値である.

(i) μ は Carleson 測度である.

(ii) $\widetilde{\mu}$ は $\mathcal{U}$ 上の有界関数である.

(iii) $\widehat{\mu}$ は $\mathcal{U}$ 上の有界関数である.

定理 3.2 **([9, Theorem 3.3]).** μ を有限な正の Borel 測度とする．このとき，次は同値である.

(i) μ は vanishing Carleson 測度である.

(ii) $z \to \partial\mathcal{U}$ のとき，$\widetilde{\mu}(z) \to 0$.

(iii) $z \to \partial\mathcal{U}$ のとき，$\widehat{\mu}(z) \to 0$.

4 合成作用素の性質

ここでは，合成作用素の性質を述べる ([10, section 11], [11] を参照).

測度 $\mu_{\varphi,\beta}$ を

$$\mu_{\varphi,\beta}(E) := \mathrm{Vol}_\beta\left(\varphi^{-1}(E)\right)$$

で定義する．このとき，C_φ が $L^p_a(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上の有界作用素であることは

$$\int_{\mathcal{U}} |f(w)|^p \, d\mu_{\varphi,\beta}(w) \le C \int_{\mathcal{U}} |f(w)|^p \, dV_\beta(w) \qquad ({}^\forall f \in L^p_a(\mathcal{U}, dV_\beta))$$

が成立する事と同値である．これは $\mu_{\varphi,\beta}$ が $L^p_a(\mathcal{U}, dV_\beta)$ の Carleson 測度である事を意味する．Carleson 測度，vanishing Carleson 測度の性質を用いると合成作用素の有界性，コンパクト性に関して次が得られる.

定理 4.1 **([9, Theorem B]).** ある $q > 0$ と $\beta_0 > \varepsilon_{\min}$ で C_φ が $L^q_a(\mathcal{U}, dV_{\beta_0})$ 上の有界作用素（コンパクト作用素）であると仮定する．このとき，すべての $p > 0$ と $\beta \ge \beta_0$ で C_φ は $L^q_a(\mathcal{U}, dV_{\beta_0})$ 上の有界作用素（コンパクト作用素）となる.

一方，C_φ が $L^2_a(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上の有界作用素と仮定する．このとき，$f \in L^2_a(\mathcal{U}, dV_\beta)$ に対して

$$C^*_\varphi f(w) = \langle C^*_\varphi f, K^{(\beta)}_w \rangle_{L^2(dV_\beta)} = \left\langle f, C_\varphi K^{(\beta)}_w \right\rangle_{L^2(dV_\beta)} \tag{4.1}$$

が成立するので

$$C_\varphi C^*_\varphi f(w) = \langle f, C_\varphi K^{(\beta)}_{\varphi(w)} \rangle_{L^2(dV_\beta)} = \int_{\mathcal{U}} K^{(\beta)}_{\mathcal{U}}(\varphi(w), \varphi(u)) f(u) \, dV_\beta(u) \tag{4.2}$$

を得る.

5 主定理の証明

ここでは主定理の証明を行う．まずは証明の際に重要な役割を果たす積分公式に関して述べる．$\mathcal{D}$を$\mathcal{U}$と正則同値なSiegel領域とする．$n_j \geq 0, q_j \geq 0, d_j \leq 0$を[3]や[1]で定義された量とする([9]も参照).

$$\varepsilon_{\mathcal{U}} := \max\left\{ \frac{n_j}{2(-2d_j+q_j)} \,\middle|\, 1 \leq j \leq l \right\}$$

に対し，Békollé, Kagouは次の積分等式を示した.

補題 5.1 ([1, Corollary II.4]). $\beta > \varepsilon_{\min}, \alpha > \beta + \varepsilon_{\mathcal{U}}$のとき，

$$\int_{\mathcal{D}} |K_{\mathcal{D}}(\zeta,\zeta')|^{1+\alpha} K_{\mathcal{D}}(\zeta',\zeta')^{-\beta}\, dV(\zeta') = CK_{\mathcal{D}}(\zeta,\zeta)^{\alpha-\beta}$$

が成立する.

Φを$\mathcal{U}$から$\mathcal{D}$への双正則写像とする．等長写像

$$L_a^2(\mathcal{D}, K_{\mathcal{D}}(\zeta,\zeta)^{-\beta}dV(\zeta)) \ni f \longmapsto \det J(\Phi,\cdot)^{1+\beta} f \circ \Phi \in L_a^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$$

を用いて，$\mathcal{D}$上の積分公式を$\mathcal{U}$へと変換することで次が得られる.

補題 5.2. $\beta > \varepsilon_{\min}, \alpha > \beta + \varepsilon_{\mathcal{U}}$のとき，

$$\int_{\mathcal{U}} |K_{\mathcal{U}}(z,z')|^{1+\alpha} |\det J(\Phi,z')|^{1+2\beta-\alpha}\, dV_\beta(z') = CK_{\mathcal{U}}(z,z)^{\alpha-\beta} |\det J(\Phi,z)|^{1+2\beta-\alpha}$$

が成立する.

補題5.2を用いて主定理の証明を行う。

定理 5.3 (定理1.1). ある$q > 0$と$\beta_0 > \varepsilon_{\min}$に対し，$C_\varphi$は$L_a^q(\mathcal{U}, dV_{\beta_0})$上の有界作用素であるとする．このとき，以下は同値である.
(i) 任意の$p > 0$と$\beta > \beta_0 + \varepsilon_{\mathcal{U}}$に対し，$C_\varphi$は$L_a^p(\mathcal{U}, dV_\beta)$上のコンパクト作用素である.
(ii) $\displaystyle\lim_{z\to\partial\mathcal{U}} \frac{K_{\mathcal{U}}(\varphi(z),\varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}(z,z)} = 0.$

Proof. $p = q = 2$としてよい．まず，$(i) \Longrightarrow (ii)$を示す．C_φを$L_a^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$上のコンパクト作用素と仮定する．このとき，$C_\varphi^*$も$L_a^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$上のコンパクト作用素である．$\{k_z^{(\beta)}\}$は$z \to \partial\mathcal{U}$としたとき，$\mathcal{U}$上で0に弱収束する．したがって$\|C_\varphi^* k_z^{(\beta)}\|_{L^2(dV_\beta)} \to 0$を得る．ここで、(4.1)から

$$\left\|C_\varphi^* k_z^{(\beta)}\right\|_{L^2(dV_\beta)}^2 = \frac{K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(\varphi(z),\varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}^{(\beta)}(z,z)} = \left(\frac{K_{\mathcal{U}}(\varphi(z),\varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}(z,z)}\right)^{1+\beta}$$

となることがわかるので (ii) が成立する.

次に $(ii) \Longrightarrow (i)$ を示す. $f \in L^2_a(\mathcal{U}, dV_\beta)$ に対し,

$$Sf(z) := \int_{\mathcal{U}} K^{(\beta)}_{\mathcal{U}}(\varphi(z), \varphi(w))\, f(w)\, dV_\beta(w)$$

とする. 仮定より C_φ は $L^2_a(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上の有界作用素となるので (4.2) より $C_\varphi C^*_\varphi = S$ を得る. したがって, $f \in L^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ に対し,

$$S^+ f(z) := \int_{\mathcal{U}} \left| K^{(\beta)}_{\mathcal{U}}(\varphi(z), \varphi(w)) \right| f(w)\, dV_\beta(w)$$

とおき, S^+ が $L^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上のコンパクト作用素であることを示せば良い. $r > 0$ に対し, $\mathcal{U}_r := \{z \in \mathcal{U} \mid \mathrm{dist}(z, \partial\mathcal{U}) < r\}$ とする.

$$\begin{aligned}
K^+_{1,r}(z,w) &:= \chi_{\mathcal{U}\setminus\mathcal{U}_r}(w) \left| K^{(\beta)}_{\mathcal{U}}(\varphi(z), \varphi(w)) \right|, \\
K^+_{2,r}(z,w) &:= \chi_{\mathcal{U}\setminus\mathcal{U}_r}(z)\, \chi_{\mathcal{U}_r}(w) \left| K^{(\beta)}_{\mathcal{U}}(\varphi(z), \varphi(w)) \right|, \\
K^+_{3,r}(z,w) &:= \chi_{\mathcal{U}_r}(z)\, \chi_{\mathcal{U}_r}(w) \left| K^{(\beta)}_{\mathcal{U}}(\varphi(z), \varphi(w)) \right|
\end{aligned}$$

に対し, $K^+_{j,r}$ を積分核とする $L^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上の作用素を $S^+_{j,r}$ とする. このとき,

$$S^+ = S^+_{1,r} + S^+_{2,r} + S^+_{3,r}$$

となる. ここで, 補題 5.2 を用いて計算すると

$$h(z) := K_{\mathcal{U}}(z,z)^{\beta-\beta_0} \left| \det J(\Phi, \varphi(z)) \right|^{1+2\beta_0-\beta}$$

は

$$\int_{\mathcal{U}} K^+_{3,r}(z,w) h(w)\, dV_\beta(w) \le C\, \chi_{\mathcal{U}_r}(z) \left(\frac{K_{\mathcal{U}}(\varphi(z), \varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}(z,z)} \right)^{\beta-\beta_0} h(z)$$

を満たすことがわかる. したがって, Schur の定理より $S^+_{3,r}$ は $L^2_a(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上の有界作用素であり, そのノルムは $CM(r)$ 以下である. ただし,

$$M(r) := \sup_{z \in \mathcal{U}_r} \left\{ \frac{K_{\mathcal{U}}(\varphi(z), \varphi(z))}{K_{\mathcal{U}}(z,z)} \right\}^{\beta-\beta_0}$$

とおいた. ここで, 条件 (ii) から $r \to 0$ のとき $M(r) \to 0$ となる. したがって, $\left\| S^+ - S^+_{1,r} - S^+_{2,r} \right\| \to 0$ が成立し, $S^+_{1,r}$ と $S^+_{2,r}$ は $L^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上のコンパクト作用素なので S^+ も $L^2(\mathcal{U}, dV_\beta)$ 上のコンパクト作用素である. $\square$

参考文献

[1] D. Békollé, A. T. Kagou, *Reproducing properties and L^p-estimates for Bergman projections in Siegel domains of type II.*, Studia. Math. **115**, (1995), 219–239.

[2] C. Cowen, B. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic function*, CRC Press, Boca Raton, 1994.

[3] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys **19-4**, (1964), 1–89.

[4] H. Ishi, C. Kai, *The representative domain of a homogeneous bounded domain*, Kyushu J. Math. **64**, (2010), 35–47.

[5] H. Ishi, S. Yamaji, *Some estimates of the Bergman kernel of minimal bounded homogeneous domains*, J. Lie Theory, **21** (2011), 755–769.

[6] X. Lu, Z. Hu, *Compact composition operators on weighted Bergman spaces on bounded symmetric domains*, Acta Math. Scientia, **31B**(2), (2011), 468–476.

[7] M. Maschler, *Minimal domains and their Bergman kernel function*, Pacific J. Math. **6**, (1956), 501–516.

[8] S. Yamaji, *Positive Toeplitz operators on the Bergman space of a minimal bounded homogeneous domain*, to appear in Hokkaido Math. J.

[9] S. Yamaji, *Composition operators on the Bergman spaces of a minimal bounded homogeneous domain*, preprint, arXiv:1105.1416.

[10] K. H. Zhu, *Operator theory in function spaces, second edition*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs Vol.**138**, 2007.

[11] K. H. Zhu, *Compact composition operators on weighted Bergman spaces of the unit ball*, Houston J. Math., **33**, (2007), 273–283.